

# Introduction à la cryptographie

École des Mines, 3e année

# Documents

- Pour aller plus loin : transparents de cours de David Pointcheval.  
[web : demander à Google](#)

# Plan

- 1 (Petite) histoire du chiffrement
- 2 Notions de sécurité
  - Hypothèses cryptographiques
  - Adversaire
  - Définitions pour la sécurité
  - Exemples
- 3 Implémentation de protocoles asymétriques
  - RSA-OAEP
  - Combinaison avec chiffrement symétrique
- 4 Protocoles symétriques en pratique
  - Chiffrement parfait
  - DES, 3DES, AES
  - Chiffrement par bloc

# Le chiffrement autrefois

- Le chiffrement de César : décalage des lettres
- Disque de chiffrement (Léone Battista Alberti 1466)



# Le chiffrement autrefois

- Le chiffrement de César : décalage des lettres
- Disque de chiffrement (Léone Battista Alberti 1466)



→ sujet à des analyses statistiques

# Le chiffrement : période technique

## Substitutions et permutations automatiques



Enigma

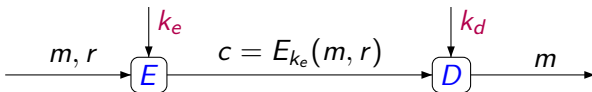
# Avantages et inconvénients

- Niveau de sécurité qui dépend du nombre de rotors
- Pas de **preuves** de sécurité

# Le chiffrement aujourd'hui

## Trois algorithmes

- $G$  - génération de clef
- $E$  - chiffrement
- $D$  - déchiffrement

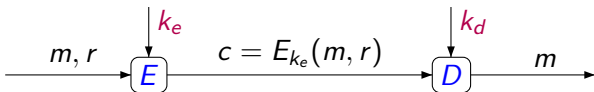




# Le chiffrement aujourd'hui

## Trois algorithmes

- $G$  - génération de clef
- $E$  - chiffrement
- $D$  - déchiffrement



$k_e = k_d$  chiffrement **symétrique**

$k_e \neq k_d$  chiffrement **asymétrique**

# Sûreté du chiffrement asymétrique

données publiques :

- $c = E_{k_e}(m, r)$  chiffré
- $k_e$  clef de chiffrement

Un unique message  $m$  satisfait la relation (avec éventuellement plusieurs  $r$  possibles)

→ Une recherche exhaustive sur  $m$  et  $r$  permet de trouver  $m$ !

# Sûreté du chiffrement asymétrique

données publiques :

- $c = E_{k_e}(m, r)$  chiffré
- $k_e$  clef de chiffrement

Un unique message  $m$  satisfait la relation (avec éventuellement plusieurs  $r$  possibles)

→ Une recherche exhaustive sur  $m$  et  $r$  permet de trouver  $m$ !

⇒ Le secret inconditionnel est impossible, il faut se baser sur des hypothèses algorithmiques.

# Plan

- 1 (Petite) histoire du chiffrement
- 2 Notions de sécurité
  - Hypothèses cryptographiques
  - Adversaire
  - Définitions pour la sécurité
  - Exemples
- 3 Implémentation de protocoles asymétriques
  - RSA-OAEP
  - Combinaison avec chiffrement symétrique
- 4 Protocoles symétriques en pratique
  - Chiffrement parfait
  - DES, 3DES, AES
  - Chiffrement par bloc

# La cryptographie moderne sur des problèmes difficiles

Exemple : factorisation des nombres premiers.

- Étant donné un entier  $n$
- trouver deux nombres premiers  $p, q$  tels que  $n = p \cdot q$ .

# La cryptographie moderne sur des problèmes difficiles

Exemple : factorisation des nombres premiers.

- Étant donné un entier  $n$
- trouver deux nombres premiers  $p, q$  tels que  $n = p \cdot q$ .

→ Calculs dans le groupe

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers.

# Factorisation d'entiers et RSA

→ Utilisation de problèmes algorithmiquement difficiles.

Factorisation :

- $p, q \mapsto n = p \cdot q$  facile (quadratique)
- $n = p \cdot q \mapsto p, q$  difficile

# Factorisation d'entiers et RSA

→ Utilisation de problèmes algorithmiquement difficiles.

Factorisation :

- $p, q \mapsto n = p \cdot q$  facile (quadratique)
- $n = p \cdot q \mapsto p, q$  difficile

fonction RSA  $n = pq$ ,  $p$  et  $q$  premiers.

$e$  : exposant public

- $x \mapsto x^e \pmod n$  facile (cubique)
- $y = x^e \mapsto x \pmod n$  difficile  
 $x = y^d$  où  $d = e^{-1} \pmod{\phi(n)}$



# Problèmes algorithmiquement difficiles

On considère le groupe  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers et  $g$  un **générateur** du groupe.

- **RSA** : étant donné  $g^a$  et  $a$ , trouver  $g$ .

# Problèmes algorithmiquement difficiles

On considère le groupe  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers et  $g$  un **générateur** du groupe.

- **RSA** : étant donné  $g^a$  et  $a$ , trouver  $g$ .
- **Discrete logarithm (DL)** : étant donné  $g^a$  et  $g$ , trouver  $a$ .

# Problèmes algorithmiquement difficiles

On considère le groupe  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers et  $g$  un **générateur** du groupe.

- **RSA** : étant donné  $g^a$  et  $a$ , trouver  $g$ .
- **Discrete logarithm (DL)** : étant donné  $g^a$  et  $g$ , trouver  $a$ .
- **Computational Diffie-Hellman (CDH)** : étant donné  $g$ ,  $g^a$  et  $g^b$ , trouver  $g^{ab}$ .

# Problèmes algorithmiquement difficiles

On considère le groupe  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers et  $g$  un **générateur** du groupe.

- **RSA** : étant donné  $g^a$  et  $a$ , trouver  $g$ .
- **Discrete logarithm (DL)** : étant donné  $g^a$  et  $g$ , trouver  $a$ .
- **Computational Diffie-Hellman (CDH)** : étant donné  $g$ ,  $g^a$  et  $g^b$ , trouver  $g^{ab}$ .
- **Decisional Diffie-Hellman (DDH)** : étant donné  $g$ ,  $g^a$ ,  $g^b$  et  $g^c$ , a-t-on  $c = ab \pmod{|G|}$  ?

$$DDH < CDH < DL$$

# Estimations pour la factorisation d'entiers

## Lenstra-Verheul 2000

Module (bits)	Opérations (en $\log_2$ )
512	58
1024	80
2048	111
4096	149
8192	156

$\approx 2^{60}$  ans

→ Bornes inférieures pour RSA aussi.

# Plan

- 1 (Petite) histoire du chiffrement
- 2 Notions de sécurité
  - Hypothèses cryptographiques
  - Adversaire
  - Définitions pour la sécurité
  - Exemples
- 3 Implémentation de protocoles asymétriques
  - RSA-OAEP
  - Combinaison avec chiffrement symétrique
- 4 Protocoles symétriques en pratique
  - Chiffrement parfait
  - DES, 3DES, AES
  - Chiffrement par bloc

# Modélisation de l'adversaire

On veut modéliser un **attaquant** :

- le plus **intelligent** possible  
→ il peut faire toutes les opérations qu'il souhaite
- qui dispose d'un **temps limité**.

# Modélisation de l'adversaire

On veut modéliser un **attaquant** :

- le plus **intelligent** possible  
→ il peut faire toutes les opérations qu'il souhaite
- qui dispose d'un **temps limité**.
  - on ne souhaite pas considérer les attaques faisables en  $2^{60}$  ans



# Modélisation de l'adversaire

On veut modéliser un **attaquant** :

- le plus **intelligent** possible  
→ il peut faire toutes les opérations qu'il souhaite
- qui dispose d'un **temps limité**.
  - on ne souhaite pas considérer les attaques faisables en  $2^{60}$  ans
  - Sinon, l'adversaire peut toujours énumérer toutes les clefs  
(temps exponentiel en  $2^{\text{taille}(\text{clefs})}$ )

# Modélisation de l'adversaire

On veut modéliser un **attaquant** :

- le plus **intelligent** possible  
→ il peut faire toutes les opérations qu'il souhaite
- qui dispose d'un **temps limité**.
  - on ne souhaite pas considérer les attaques faisables en  $2^{60}$  ans
  - Sinon, l'adversaire peut toujours énumérer toutes les clefs (temps exponentiel en  $2^{\text{taille}(\text{clefs})}$ )

**Modèle** : on considère n'importe quelle **machine de Turing**

- pour modéliser n'importe quel algorithme

# Modélisation de l'adversaire

On veut modéliser un **attaquant** :

- le plus **intelligent** possible  
→ il peut faire toutes les opérations qu'il souhaite
- qui dispose d'un **temps limité**.
  - on ne souhaite pas considérer les attaques faisables en  $2^{60}$  ans
  - Sinon, l'adversaire peut toujours énumérer toutes les clefs (temps exponentiel en  $2^{\text{taille}(\text{clefs})}$ )

**Modèle** : on considère n'importe quelle **machine de Turing**

- pour modéliser n'importe quel algorithme
- **probabiliste** : l'adversaire peut générer des clefs, tirer au sort certaines étapes de son comportement

# Modélisation de l'adversaire

On veut modéliser un **attaquant** :

- le plus **intelligent** possible  
→ il peut faire toutes les opérations qu'il souhaite
- qui dispose d'un **temps limité**.
  - on ne souhaite pas considérer les attaques faisables en  $2^{60}$  ans
  - Sinon, l'adversaire peut toujours énumérer toutes les clefs (temps exponentiel en  $2^{\text{taille}(\text{clefs})}$ )

**Modèle** : on considère n'importe quelle **machine de Turing**

- pour modéliser n'importe quel algorithme
- **probabiliste** : l'adversaire peut générer des clefs, tirer au sort certaines étapes de son comportement
- **polynomiale** en la taille des clefs : représente le temps **raisonnable** d'exécution.

# Principe des preuves de sécurité

## Preuve par réduction

- 1 **Hypothèse** : Le problème algorithmique  $P$  est difficile = il n'y a pas d'algo polynomial ( $P = \text{RSA}, \text{DL}, \text{DDH}, \text{CDH} \dots$ )

# Principe des preuves de sécurité

## Preuve par réduction

- 1 **Hypothèse** : Le problème algorithmique  $P$  est difficile = il n'y a pas d'algo polynomial ( $P = \text{RSA}, \text{DL}, \text{DDH}, \text{CDH} \dots$ )
- 2 **Réduction** :
  - Si  $A$  un adversaire (polynomial) casse le schéma de chiffrement,
  - Alors  $A$  peut-être utilisé pour résoudre  $P$  en temps polynomial.

# Principe des preuves de sécurité

## Preuve par réduction

- 1 **Hypothèse** : Le problème algorithmique  $P$  est difficile = il n'y a pas d'algo polynomial ( $P = \text{RSA}, \text{DL}, \text{DDH}, \text{CDH} \dots$ )
- 2 **Réduction** :
  - Si  $A$  un adversaire (polynomial) casse le schéma de chiffrement,
  - Alors  $A$  peut-être utilisé pour résoudre  $P$  en temps polynomial.
- 3 **Résultat de sécurité** : il n'existe pas d'adversaire polynomial

# Définitions

Comment définir la **sécurité** d'un algorithme de chiffrement ?

→ Plusieurs propositions.



# One-Wayness (OW)

Adversaire  $\mathcal{A}$  : une machine de Turing probabiliste et polynomial (PPTM)

Notion de sécurité de base : One-Wayness (OW)

Sans la clef privée, il est impossible d'obtenir le texte en clair :

$$\Pr_{m,r}[c = E(m; r) \mid \mathcal{A}(c) = m]$$

est **négligeable**.

# One-Wayness (OW)

Adversaire  $\mathcal{A}$  : une machine de Turing probabiliste et polynomial (PPTM)

Notion de sécurité de base : One-Wayness (OW)

Sans la clef privée, il est impossible d'obtenir le texte en clair :

$$\Pr_{m,r}[c = E(m; r) \mid \mathcal{A}(c) = m]$$

est **négligeable**.

Négligeabilité :  $f$  est **négligeable** si pour tout polynôme  $p$ , il existe  $\eta_0$  t.q. pour tout  $\eta \geq \eta_0$

$$f(\eta) \leq 1/p(\eta)$$

# Ce n'est pas assez

- Cela n'empêche pas de connaître la moitié du texte en clair
- On peut avoir une connaissance partielle du message :
  - **Sujet** : XXXX
  - **Ma réponse est** : XXXX

# Ce n'est pas assez

- Cela n'empêche pas de connaître la moitié du texte en clair
- On peut avoir une connaissance partielle du message :
  - **Sujet** : XXXX
  - **Ma réponse est** : XXXX

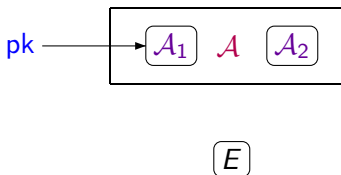
→ **Introduction d'une notion d'indistinguabilité** :

l'adversaire ne doit pas pouvoir deviner ne serait-ce qu'un bit du message.

# Indistinguabilité (IND)

Jeu Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

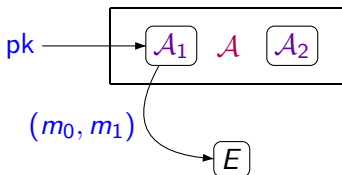
- 1 On donne à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$  la clef publique  $pk$ .



# Indistinguabilité (IND)

Jeu Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

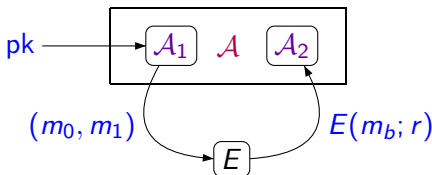
- 1 On donne à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$  la clef publique  $pk$ .
- 2 L'adversaire  $\mathcal{A}_1$  choisit deux messages  $m_0, m_1$ .



# Indistinguabilité (IND)

Jeu Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

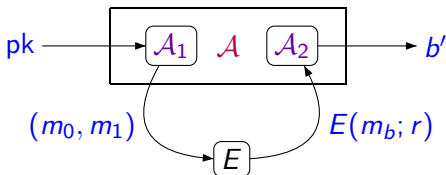
- 1 On donne à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$  la clef publique  $pk$ .
- 2 L'adversaire  $\mathcal{A}_1$  choisit deux messages  $m_0, m_1$ .
- 3 un bit  $b = 0, 1$  est choisi au hasard et on donne  $c = E(m_b; r)$  à l'adversaire.



# Indistinguabilité (IND)

Jeu Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

- 1 On donne à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$  la clef publique  $pk$ .
- 2 L'adversaire  $\mathcal{A}_1$  choisit deux messages  $m_0, m_1$ .
- 3 un bit  $b = 0, 1$  est choisi au hasard et on donne  $c = E(m_b; r)$  à l'adversaire.
- 4 L'adversaire  $\mathcal{A}_2$  répond par  $b'$ .

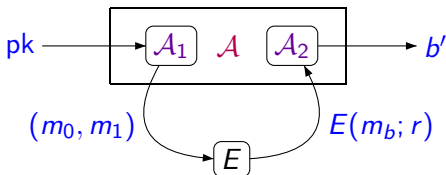




# Indistinguabilité (IND)

Jeu Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

- 1 On donne à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$  la clef publique  $pk$ .
- 2 L'adversaire  $\mathcal{A}_1$  choisit deux messages  $m_0, m_1$ .
- 3 un bit  $b = 0, 1$  est choisi au hasard et on donne  $c = E(m_b; r)$  à l'adversaire.
- 4 L'adversaire  $\mathcal{A}_2$  répond par  $b'$ .



La probabilité  $\Pr[b = b'] - \frac{1}{2}$  doit être **négligeable**.

# Encore plus fort !

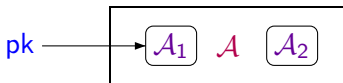
## Non Malléabilité (NM)

Étant donné un chiffré  $E(m; r)$ , l'adversaire ne doit pas être capable de créer un chiffré  $E(m'; r')$  tel que les messages  $m$  et  $m'$  aient un lien.

# Non Malléabilité (NM)

Game Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

- 1 On donne la clef publique  $pk$  à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$

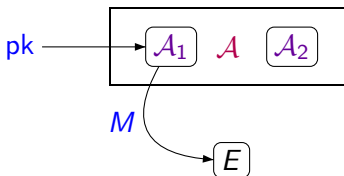


$E$

# Non Malléabilité (NM)

Game Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

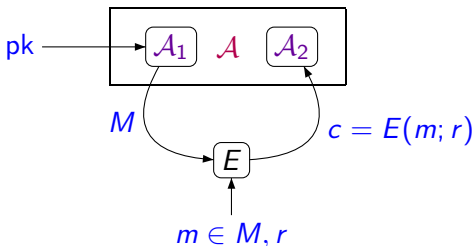
- 1 On donne la clef publique  $pk$  à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$
- 2 L'adversaire  $\mathcal{A}_1$  choisit un ensemble de messages  $M$ .



# Non Malléabilité (NM)

Game Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

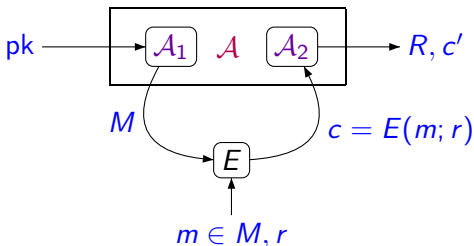
- 1 On donne la clef publique  $pk$  à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$
- 2 L'adversaire  $\mathcal{A}_1$  choisit un ensemble de messages  $M$ .
- 3 Deux messages  $m$  et  $m^*$  sont choisis au hasard dans  $M$  et on donne  $c = E(m; r)$  à l'adversaire.



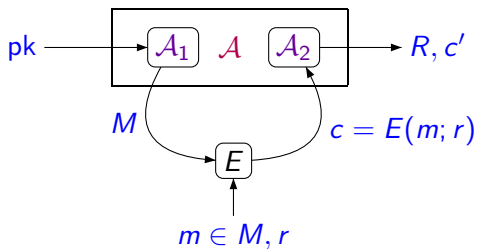
# Non Malléabilité (NM)

Game Adversaire :  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

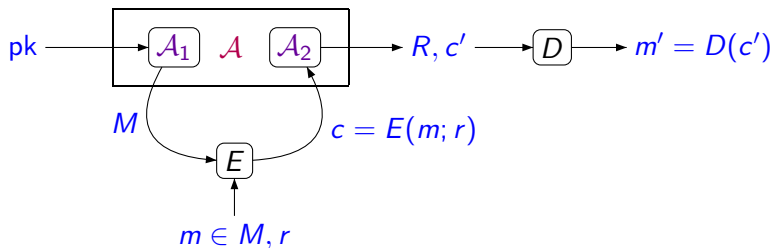
- 1 On donne la clef publique  $pk$  à l'adversaire  $\mathcal{A}_1$
- 2 L'adversaire  $\mathcal{A}_1$  choisit un ensemble de messages  $M$ .
- 3 Deux messages  $m$  et  $m^*$  sont choisis au hasard dans  $M$  et on donne  $c = E(m; r)$  à l'adversaire.
- 4 L'adversaire  $\mathcal{A}_2$  renvoie une relation binaire  $R$  et un chiffré  $c'$ .



# Non Malléabilité (NM)

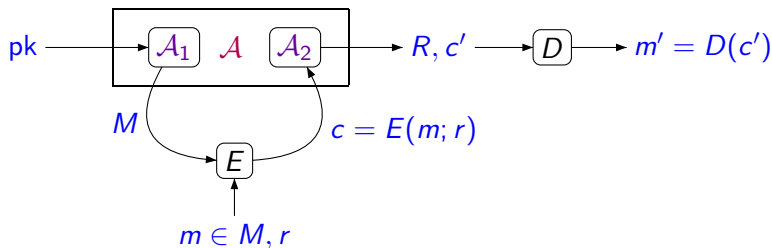


# Non Malléabilité (NM)





# Non Malléabilité (NM)



La probabilité que  $\Pr[R(m, m')] - \Pr[R(m, m^*)]$  doit être négligeable.

# Relations

Non Malléabilité



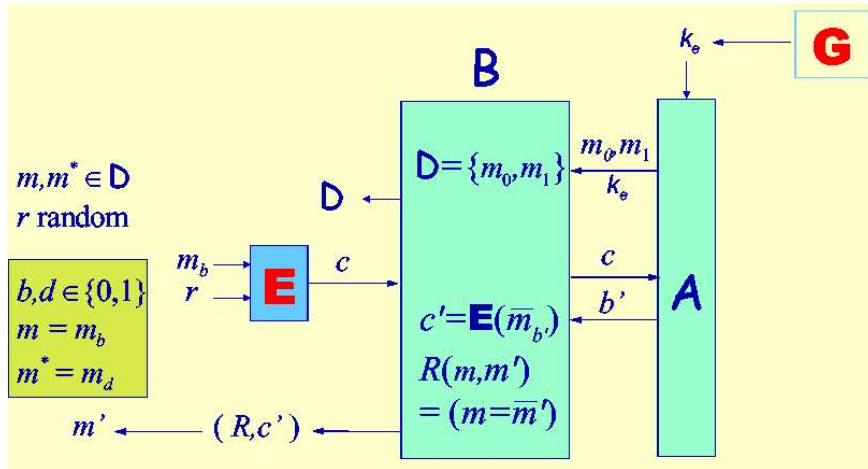
Indistinguabilité



One-Wayness

# IND $\Rightarrow$ NM - Construction

transparent emprunté à David Pointcheval



# IND $\Rightarrow$ NM - Preuve (1)

transparent emprunté à David Pointcheval

$$c' = \mathbf{E}(m_{b'}) \quad R(m, m') = (m = \bar{m}')$$

- Under the assumptions
  - $m_0 \neq m_1$  and  $b \neq d$
  - otherwise: advantage = 0

- If  $b' = b$ :  $m' = \bar{m}_b$

$$R(m, m') = (m_b = \bar{m}') = 1 \quad R(m^*, m') = (m_d = \bar{m}') = (b = d)$$

- If  $b' \neq b$ :  $m' = \bar{m}_{1-b}$

$$R(m, m') = (m_b = \bar{m}') = 0 \quad R(m^*, m') = (m_d = \bar{m}') = (b \neq d)$$

IND  $\Rightarrow$  NM - Preuve (2)

transparent emprunté à David Pointcheval

$$\text{Adv}^{nm}(\mathbf{B} | b \neq d)$$

$$= \Pr[R(m, m') | b \neq d] - \Pr[R(m^*, m') | b \neq d]$$

$$= 1 \times \Pr[b' = b | b \neq d] + 0 \times \Pr[b' \neq b | b \neq d]$$

$$- \frac{1}{2} \times \Pr[b' = b | b \neq d] - \frac{1}{2} \times \Pr[b' \neq b | b \neq d]$$

$$= \Pr[b' = b | b \neq d] - \frac{1}{2} = \text{Adv}^{ind}(\mathbf{A} | b \neq d) / 2$$

$$\text{Adv}^{nm}(\mathbf{B} | b = d) = 0$$

$$\text{Adv}^{ind}(\mathbf{A} | m_0 = m_1) = 0$$

$$\text{Adv}^{nm}(\mathbf{B}) = \text{Adv}^{ind}(\mathbf{A}) / 4$$

# Ajouter encore plus de sécurité

L'adversaire a accès à des **oracles** :

→ **chiffrement** de tous les messages de son choix

→ **déchiffrement** de tous les messages de son choix

Trois niveaux classiques de sécurité :

- Chosen-Plaintext Attacks (**CPA**)

# Ajouter encore plus de sécurité

L'adversaire a accès à des **oracles** :

→ **chiffrement** de tous les messages de son choix

→ **déchiffrement** de tous les messages de son choix

Trois niveaux classiques de sécurité :

- Chosen-Plaintext Attacks (**CPA**)
- Non adaptive Chosen-Ciphertext Attacks (**CCA1**)  
→ accès à l'oracle seulement avant le challenge.

# Ajouter encore plus de sécurité

L'adversaire a accès à des **oracles** :

→ **chiffrement** de tous les messages de son choix

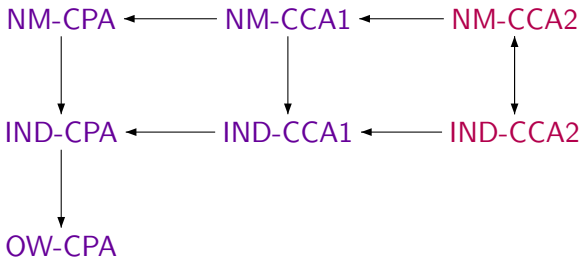
→ **déchiffrement** de tous les messages de son choix

Trois niveaux classiques de sécurité :

- Chosen-Plaintext Attacks (**CPA**)
- Non adaptive Chosen-Ciphertext Attacks (**CCA1**)  
→ accès à l'oracle seulement avant le challenge.
- Adaptive Chosen-Ciphertext Attacks (**CCA2**)  
→ accès illimité à l'oracle (sauf pour le challenge)



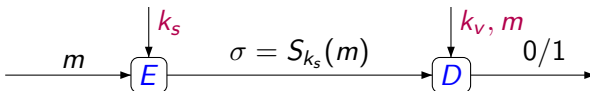
# Relations



# Signatures

## Trois algorithmes

- $G$  - génération de clef
- $S$  - signature
- $V$  - vérification



# Sécurité des signatures

Propriété de base : **Existentially unforgeable**

## Definition

Sans la clef privée, il est impossible de créer un couple de  $(m, \sigma)$  valide.

$$\Pr[V(m, \sigma) = 1 \mid \mathcal{A}(k_v) = (m, \sigma)]$$

# Plan

- 1 (Petite) histoire du chiffrement
- 2 Notions de sécurité
  - Hypothèses cryptographiques
  - Adversaire
  - Définitions pour la sécurité
  - Exemples
- 3 Implémentation de protocoles asymétriques
  - RSA-OAEP
  - Combinaison avec chiffrement symétrique
- 4 Protocoles symétriques en pratique
  - Chiffrement parfait
  - DES, 3DES, AES
  - Chiffrement par bloc

# Exemple : RSA

public	privé
$n = pq$	$d = e^{-1} \bmod \phi(n)$
$e$ (clef publique)	(clef privée)

## Chiffrement RSA

- $E(m) = m^e \bmod n$
- $D(c) = c^d \bmod n$

OW-CPA = problème RSA par définition !

# Exemple : RSA

public	privé
$n = pq$	$d = e^{-1} \bmod \phi(n)$
$e$ (clef publique)	(clef privée)

## Chiffrement RSA

- $E(m) = m^e \bmod n$
- $D(c) = c^d \bmod n$

OW-CPA = problème RSA par définition !

Mais **sujet à des attaques** de type **chiffré choisi adaptable** (Daniel Bleichenbacher, 1998).

# El Gamal

Basé sur le problème du logarithme discret dans le groupe  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers et  $g$  un **générateur** du groupe.

On choisit  $d$  tel que  $1 \leq d \leq n - 2$ . Soit  $b = g^d \pmod n$ .

Clé publique :  $k = (n, g, b)$

Clé privée :  $d$

# El Gamal

Basé sur le problème du logarithme discret dans le groupe  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers et  $g$  un **générateur** du groupe.

On choisit  $d$  tel que  $1 \leq d \leq n - 2$ . Soit  $b = g^d \pmod n$ .

Clé publique :  $k = (n, g, b)$

Clé privée :  $d$

Chiffrement

$E_k(M) = C = (c_1, c_2)$  avec  $c_1 = g^s \pmod n$  et  $c_2 = M \cdot b^s \pmod n$

$s$  nombre aléatoire généré par celui qui chiffre le message.



# El Gamal

Basé sur le problème du logarithme discret dans le groupe  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , avec  $n = p \cdot q$ ,  $p, q$  nombres premiers et  $g$  un **générateur** du groupe.

On choisit  $d$  tel que  $1 \leq d \leq n - 2$ . Soit  $b = g^d \pmod n$ .

Clé publique :  $k = (n, g, b)$

Clé privée :  $d$

Chiffrement

$E_k(M) = C = (c_1, c_2)$  avec  $c_1 = g^s \pmod n$  et  $c_2 = M \cdot b^s \pmod n$   
 $s$  nombre aléatoire généré par celui qui chiffre le message.

Déchiffrement

$D_d(C) = c_2 / (c_1)^d = (M \cdot b^s) / (g^s)^d = M \cdot g^{(d \cdot s)} / g^{(d \cdot s)} = M \pmod n$

# Sécurité de El Gamal (OW-CPA)

## Theorem (OW-CPA)

*El Gamal est OW-CPA sous l'hypothèse CDH difficile.*

Preuve : En exercice

# Sécurité de El Gamal (IND-CPA)

Clé publique :  $k = (n, g, b)$

Clé privée :  $d$

$E_k(M) = C = (c_1, c_2)$  avec  $c_1 = g^s \pmod n$  et  $c_2 = M \cdot b^s \pmod n$

Theorem (IND-CPA)

*El Gamal est IND-CPA sous l'hypothèse DDH difficile.*

# Sécurité de El Gamal (IND-CPA)

Clé publique :  $k = (n, g, b)$

Clé privée :  $d$

$E_k(M) = C = (c_1, c_2)$  avec  $c_1 = g^s \pmod n$  et  $c_2 = M \cdot b^s \pmod n$

## Theorem (IND-CPA)

*El Gamal est IND-CPA sous l'hypothèse DDH difficile.*

**Preuve : (intuition)** Soit  $\mathcal{A}$  un adversaire qui casse El Gamal pour IND-CPA. On construit  $\mathcal{B}$  qui casse DDH.

- $\mathcal{B}$  reçoit  $(g^a, g^b, g^c)$ . Il doit dire si  $g^{ab} = g^c$ .
- $\mathcal{B}$  envoie la clef publique  $g^a$  à  $\mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$  calcule  $(m_0, m_1)$
- $\mathcal{B}$  choisit  $b \in \{0, 1\}$  au hasard et envoie  $c = (B, Cm_b)$ .
- $\mathcal{A}$  envoie  $b'$
- $\mathcal{B}$  répond par  $(b = b')$ .

# Plan

- 1 (Petite) histoire du chiffrement
- 2 Notions de sécurité
  - Hypothèses cryptographiques
  - Adversaire
  - Définitions pour la sécurité
  - Exemples
- 3 Implémentation de protocoles asymétriques
  - RSA-OAEP
  - Combinaison avec chiffrement symétrique
- 4 Protocoles symétriques en pratique
  - Chiffrement parfait
  - DES, 3DES, AES
  - Chiffrement par bloc

# RSA-OAEP

Format de chiffrement RSA normalisé

**OAEP** (Optimal Asymmetric Encryption Padding)  
schéma de remplissage

- Introduit en 1994 par **Mihir Bellare et Phil Rogaway**.
- Il nécessite une **source d'aléa**,
- ainsi que deux **fonctions de hachage**.

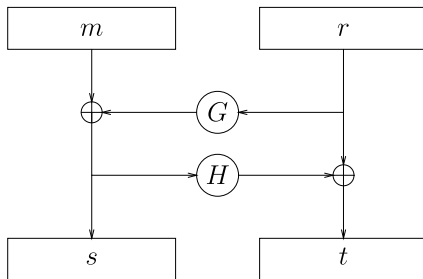
Reconnu par de nombreuses normes :  
**RSA-PKCS, SET, IETF, IEEE, ISO**

# Description de RSA-OAEP

Soient  $G$  et  $H$  deux fonctions de hachage.

Soit  $r$  un nombre aléatoire.

$$\text{OAEP}(M) = [(M \oplus G(r)) \parallel (r \oplus H(M \oplus G(r)))]$$



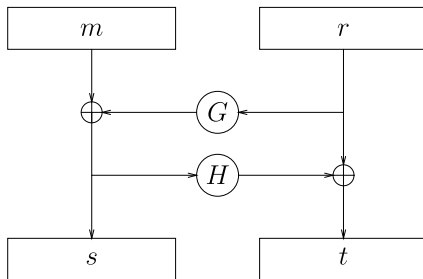
# Description de RSA-OAEP

Soient  $G$  et  $H$  deux fonctions de hachage.

Soit  $r$  un nombre aléatoire.

$$\text{OAEP}(M) = [(M \oplus G(r)) \parallel (r \oplus H(M \oplus G(r)))]$$

$$\text{RSA-OAEP}_{n,e}(M) = \text{OAEP}(M)^e \pmod{n}$$





# Sécurité de RSA-OAEP

## Theorem

*Le schéma de chiffrement RSA-OAEP est IND-CCA2.*

# Pour chiffrer de longs messages

On combine chiffrement asymétrique et symétrique :

$$\text{enca}(m, \text{pub}(a)) = [k]_{\text{pub}(a)}, \{m\}_k$$

- $k$  est une clef symétrique fraîche
- $[\_]\_$  est un algorithme de chiffrement asymétrique (RSA-OAEP) par exemple
- $\{\_ \}_$  est un algorithme de chiffrement symétrique

# Plan

- 1 (Petite) histoire du chiffrement
- 2 Notions de sécurité
  - Hypothèses cryptographiques
  - Adversaire
  - Définitions pour la sécurité
  - Exemples
- 3 Implémentation de protocoles asymétriques
  - RSA-OAEP
  - Combinaison avec chiffrement symétrique
- 4 Protocoles symétriques en pratique
  - Chiffrement parfait
  - DES, 3DES, AES
  - Chiffrement par bloc

# Chiffrement parfait

- Utilisation d'un **masque aléatoire** qui est la clé.

$$0 \oplus 0 = 0$$

- Ou exclusif bit-à-bit

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

Chiffrement :  $\{m\}_k = m \oplus k$

# Chiffrement parfait

- Utilisation d'un **masque aléatoire** qui est la clé.

$$0 \oplus 0 = 0$$

- Ou exclusif bit-à-bit

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

Chiffrement :  $\{m\}_k = m \oplus k$

Exemple :

- $M = 0110101011010100$  (message en clair)
- $K = 0101011011100110$  (la clé K secrète)
- Chiffrement :  $C = M \oplus K = 0011110000110010$
- Déchiffrement :  $M = C \oplus K = 0110101011010100$

# Avantages et Inconvénients

# Avantages et Inconvénients

## Avantages

- Parfaitement sûr
- Très rapide

## Inconvénients

- La clef ne doit pas être réutilisée
- Il faut un bon générateur d'aléa pour la clef

# Avantages et Inconvénients

## Avantages

- Parfaitement sûr
- Très rapide

## Inconvénients

- La clef ne doit pas être réutilisée
- Il faut un bon générateur d'aléa pour la clef

Applications essentiellement **militaires** (téléphone rouge, ...)



# DES (Data Encryption Standard) - 1

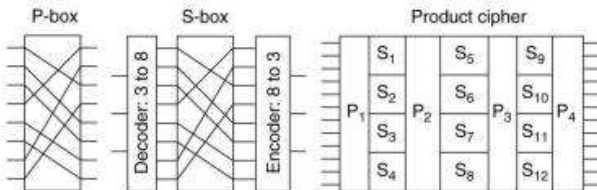
- Inventé par IBM au début des années 70 (128 bits)
- Modifié par la NSA avant sa déclassification (56 bits)

# DES (Data Encryption Standard) - 1

- Inventé par IBM au début des années 70 (128 bits)
- Modifié par la NSA avant sa déclassification (56 bits)

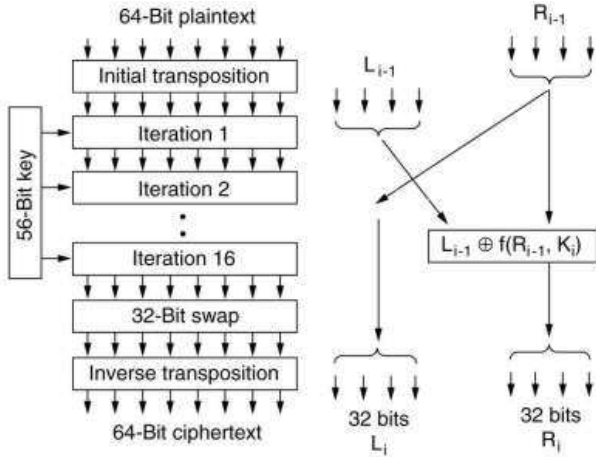
Comment ça marche ?

- substitutions *S-Box*
- permutations *P-Box*



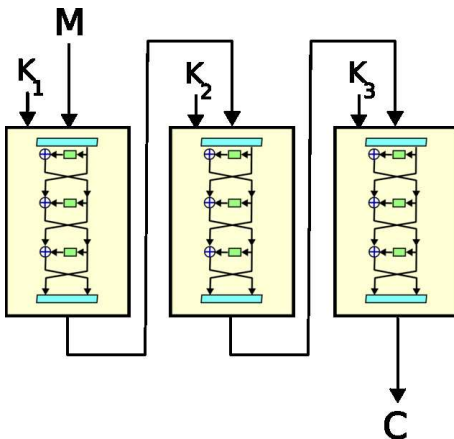
→ Contrairement à la cryptographie asymétrique, **pas de sécurité prouvée**.

# DES (Data Encryption Standard) - 2



# Triple DES

Passage à des clefs de 112 bits



# AES (Advanced Encryption Standard)

- Résultat d'une compétition pour le nouveau standard de chiffrement américain
- Gagné par Rijndael avec 2001
- Chiffrement à 128 ou 256 bits
- Basé sur la théorie de Galois

## Pour chiffrer de longs messages

- On sait chiffrer des petits messages (**blocs**)  
→ Chiffrement par bloc
- Comment assembler les blocs ?

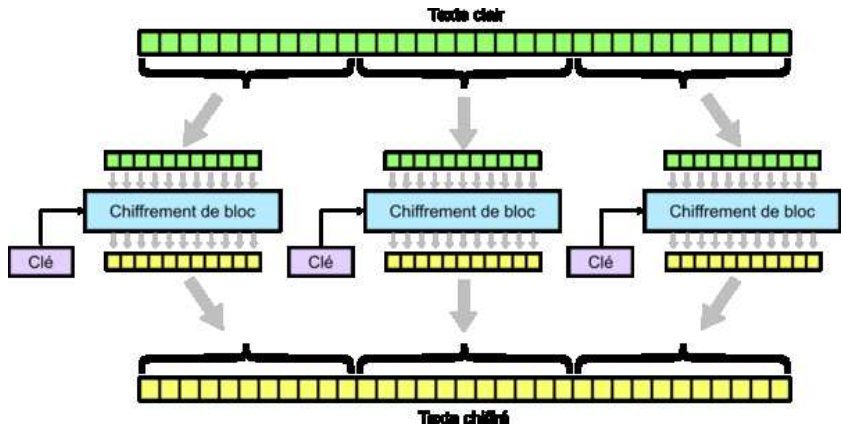
# Pour chiffrer de longs messages

- On sait chiffrer des petits messages (**blocs**)  
→ Chiffrement par bloc
- Comment assembler les blocs ?

## Deux modes classiques

- Electronic codebook (**ECB**)
- Cipher Block Chaining (**CBC**)

# Electronic codebook (ECB)





# Inconvénients

?

# Inconvénients

- Malléable :

À partir de  $\{m_1 \cdot m_2 \cdots m_p\}_k = \{m_1\}_k \cdot \{m_2\}_k \cdots \{m_p\}_k$ ,  
on peut calculer  $\{m_2 \cdot m_1 \cdots m_p\}_k$

- On peut tester l'égalité de certains blocs :

$$\{m_1\}_k = \{m_2\}_k \Rightarrow m_1 = m_2$$

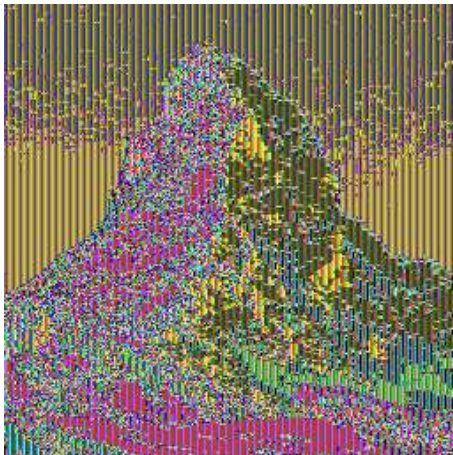
# Exemple en images

## Le Cervin

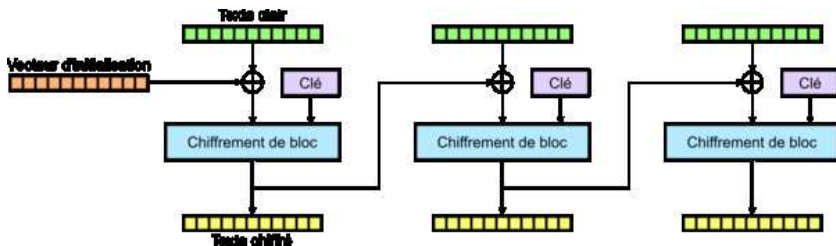


## Exemple en images

Le Cervin chiffré avec ECB



# Cipher Block Chaining (CBC)



## Exemple en images

Le Cervin chiffré avec CBC

